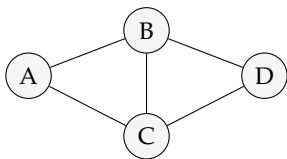


Graphes

Fiche de synthèse

① VOCABULAIRE

Définition 1 (Graphe) Un **graphe** est formé d'un ensemble de **sommets** et d'un ensemble d'**arêtes**, chaque arête reliant deux sommets.



- L'**ordre** d'un graphe est son nombre de sommets : 4 ci-dessus.
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.
- Une **boucle** relie un sommet à lui-même ; un graphe **simple** n'a aucune boucle et au plus une arête entre deux sommets.
- Dans un graphe **orienté**, chaque arête a un sens de parcours : on parle d'**arcs**.
- Dans un graphe **complet**, deux sommets distincts quelconques sont reliés par une arête.

② DEGRÉ D'UN SOMMET

Définition 2 (Degré) Le **degré** d'un sommet est le nombre d'extrémités d'arêtes en ce sommet. Dans un graphe simple, c'est le nombre d'arêtes issues du sommet ; une boucle compte pour deux.

Théorème 1 (Somme des degrés) La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Ci-dessus, les degrés de A, B, C et D sont 2, 3, 3 et 2 : leur somme vaut 10, le double des 5 arêtes. Dans un graphe complet à n sommets, chaque sommet est de degré $n - 1$.

③ CHAÎNES ET CONNEXITÉ

- Une **chaîne** est une suite d'arêtes mises bout à bout ; sa **longueur** est son nombre d'arêtes.
- Un **cycle** est une chaîne dont les arêtes sont toutes distinctes et dont les extrémités coïncident : A, B, C, A ci-dessus.
- Un graphe est **connexe** quand deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne : il est d'un seul tenant.

Remarque 1. Hors programme. Une chaîne **eulérienne** emprunte chaque arête une seule fois. Un graphe en possède

une si, et seulement si, il est connexe et a zéro ou deux sommets de degré impair. Le graphe ci-dessus en a deux, B et C : une chaîne eulérienne va de B à C.

④ MATRICE D'ADJACENCE

Définition 3 (Matrice d'adjacence) Les sommets étant numérotés de 1 à n , la **matrice d'adjacence** est le tableau carré A de taille n dont le coefficient a_{ij} est le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j .

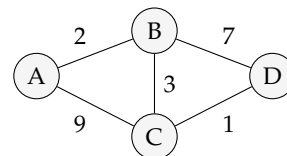
Avec A, B, C, D numérotés de 1 à 4, le graphe ci-dessus a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.
- Dans un graphe simple non orienté, la somme d'une ligne est le degré du sommet correspondant.

⑤ GRAPHES PONDÉRÉS

Définition 4 (Graphe pondéré) Un graphe **pondéré** associe à chaque arête un nombre positif, son **poids**. Le **poids** d'une chaîne est la somme des poids de ses arêtes.



Une **plus courte chaîne** entre deux sommets est une chaîne de poids minimal ; ce poids est la **distance** entre les deux sommets. Ici, la plus courte chaîne de A à D est A, B, C, D, de poids 6 : elle a trois arêtes, alors que A, B, D n'en a que deux mais pèse 9. On ne confond pas le poids d'une chaîne et sa longueur.

À retenir.

- Un graphe est formé de sommets et d'arêtes, ou d'arcs s'il est orienté.
- La somme des degrés vaut le double du nombre d'arêtes.
- Le poids d'une chaîne est la somme des poids de ses arêtes, sa longueur est son nombre d'arêtes.